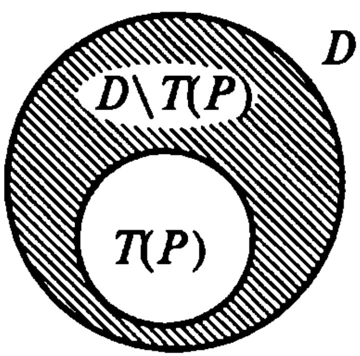
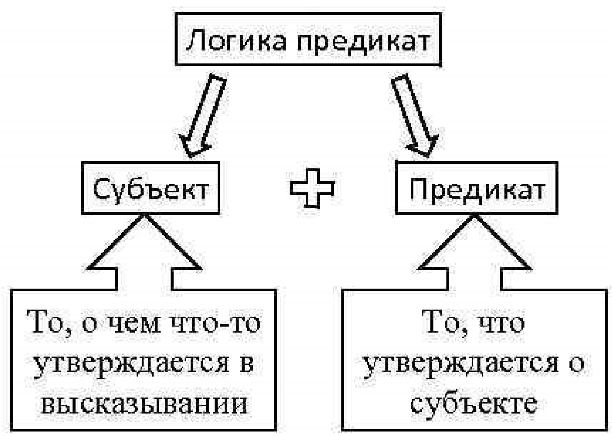
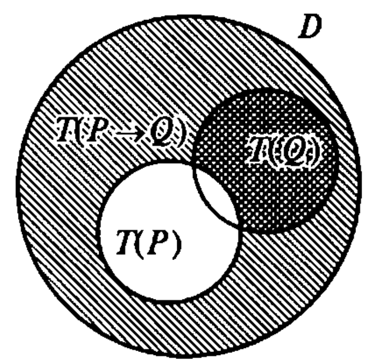
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное образовательное учреждение
высшего образования Московской области
«Государственный гуманитарно-технологический университет»
Промышленно-экономический колледж

Тема урока: Логика предикатов





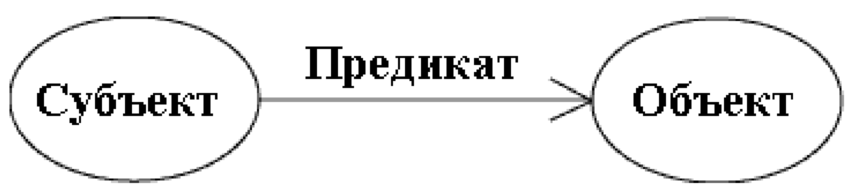


**Автор: Савинова Лариса Николаевна,
преподаватель математических дисциплин**

Логика предикатов

«Результат считается красивым,
если из малого числа условий удается
получить общие заключения,
относящиеся к широкому кругу объектов»
Б. Гнеденко

С помощью формальных теорий можно описать обширный класс высказываний, называемых ***предикатами.***



Цели и задачи урока:

- ввести основные понятия логики предикатов;
- сформулировать понятие предиката;
- рассмотреть язык логики предикатов;
- изучить логические операции (связки) над предикатами;
- научиться составлять предикаты для высказываний;
- научиться из предикатов с помощью кванторов строить высказывания и исследовать их на истинность;
- содействовать развитию математического мышления обучающихся;
- развивать культуру устной математической речи, чувство самоконтроля.

Формальная теория $S = \langle A, F, P, R \rangle$ называется **исчислением предикатов** первого порядка, если заданы алфавит, формулы, аксиомы и правила вывода.

1. Алфавит *A*:

- x, y, z… — предметные переменные, принимающие конкретные значения из некоего множества *D*. Тогда x_0, y_0, z_0… — значения предметных переменных, т.е. предметные постоянные (константы);
- p, q, r… — переменные высказывания, принимающие два значения: 1 (истина) и 0 (ложь). Тогда p_0, q_0, r_0… — фиксированные значения;
- P, Q, F — переменные, символизирующие само высказывание; P_0, Q_0 — постоянные предикаты;
- $\rightarrow$, $\neg$ — символы логических операций; дополнительно
- используются символы $\wedge$, $\vee$;

- ∀, ∃ — кванторы общности и существования;
- служебные символы) , (— нужны для установления порядка выполнения связок и области действия кванторов;
- можно использовать также знаки:

  ! — единственность, **:** — «такой, что…» и другие символы метаязыка.

Например, $\forall x \in \{3, 4, \dots, 25\}\ \exists!\, y \in (0, +\infty): x = y^2$.

2. Формулы: F:

- переменные есть формулы;
- если A, B — формулы, x — переменная, то $A(x), (\bar{A}), (A \to B), \forall x\, A(x, \dots), \exists x\, A(x, \dots)$ — формулы.

3. Аксиомы:

- исчисления высказываний:

$$P_1\colon \left(A \to (B \to A)\right);$$

$$P_2\colon \left(A \to (B \to C)\right) \to \left((A \to B) \to (A \to C)\right);$$

$$P_3\colon (\bar{B} \to \bar{A}) \to \left((\bar{B} \to A) \to B\right);$$

- кванторные: $P_4\colon \forall x\, A(x) \to A(y)$; $P_5\colon A(x) \to \exists y A(y)$.

4. Правила вывода:

$$R_1\colon \frac{A,\ A \to B}{B} \text{ — } \textit{modus ponens};$$

$$R_2\colon \frac{A \to B(x)}{A \to \forall x B(x)} \text{ — введение квантора общности;}$$

$$R_3\colon \frac{A(x) \to B}{\exists x A(x) \to B} \text{ — введение квантора существования.}$$

Построенная формальная теория S описывает весьма общие объекты, поэтому нужно ее интерпретировать в то, с чем можно работать.

Под предикатом будем понимать следующее. *Произвольная функция* $P: M^n \to B$, *заданная на произвольном множестве* M, *называется n-местным предикатом* $P\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Причем в такой трактовке *P* уже задает семантическую характеристику.

Предикаты дают возможность математически анализировать суждения. *В классической логике* ***предикатом*** *называется сказуемое суждения, т.е. то, что утверждается или отрицается относительно субъекта этого суждения, имени предмета мысли, фиксирующее его определенные свойства. А в математической логике понятие предиката рассматривается как тождественное суждению, содержащему местоимения, т.е. пропозиционная функция, аргументами которой служат имена.*

Например, о высказывательной форме «Он получил специальность программиста» нельзя сказать, истинна она или ложна, пока не произведена замена местоимения «он» на существительное: «М. А. Иванов стал программистом» (истинно), «Дом стал программистом» (ложно).

Язык логики предикатов.

Символами X, Y, Z, X_i, Y_i ... в логике предикатов принято обозначать *предметные переменные*, т.е. отдельные *предметы* — *имена*. Они могут быть простыми и сложными. Если такие предметы (имена) не содержат дополнительной информации о себе, то они называются **собственными** (простыми), например «земля», «студент» и др. Если такое имя содержит наряду с самим предметом его отдельные свойства, то оно является **сложным**, например «автор романа «Анна Каренина», «перпендикулярные прямые», «взаимно-однозначное соответствие» и др.

Символами a, b, c, a_i, b_i ... принято обозначать **константы** или *предметные постоянные*, т. е. конкретные значения имен предметов из указанной предметной области. Высказывательные формы, входящие в предикаты, называют также пропозиционными функциями, или **предикаторами**.

Рассмотрим двухместную высказывательную форму

$x \geq y + 2$, где x определено на множестве $M_x = \{3, 5\}$, а y — на множестве $M_y = \{1,\ 5,\ 8\}$, Этой форме соответствуют два предиката P_1 и P_2, определенные на множествах $M_x \times M_y$ и $M_y \times M_x$, которые образованы с помощью декартова произведения двух множеств.

Сравним предикаты $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y) = P_1(y, x)$ по таблице.

Сравнение предикатов $P_1(x, y)$ и $P_2(x, y) = P_1(y, x)$

$M_x \times M_y$: (x, y)	$x \geq y + 2$	$P_1(x, y)$	$M_y \times M_x$: (y, x)	$y \geq x + 2$	$P_2(x, y)$
(3, 1)	$3 \geq 3$	1	(1, 3)	$1 \geq 5$	0
(3, 5)	$3 \geq 7$	0	(1, 5)	$1 \geq 7$	0
(3, 8)	$3 \geq 10$	0	(5, 3)	$5 \geq 5$	1
(5, 1)	$5 \geq 3$	1	(5, 5)	$5 \geq 7$	0
(5, 5)	$5 \geq 7$	0	(8, 3)	$8 \geq 3$	1
(5, 8)	$5 \geq 10$	0	(8, 5)	$8 \geq 7$	1

Принято одноместный предикат называть **предикатом-свойством**, n-местный (для $n > 1$, $n \in N$) — **предикатом-отношением**, 0-местный предикат — **высказыванием**.

Полный прообраз единицы (1) при P назовем **множеством истинности** $T(P)$ предиката P (от англ. truth — истина): $T(P) = P^{-1}(1) = \{x | x \in M^n, P(x) = 1\}$.

В рассмотренном примере множество истинности $T(P_1)$ предиката $P_1(x)$: $x \geq y + 2$ равно $T(P_1) = \{(3, 1), (5, 1)\}$, а для предиката $P_2(x)$ множество истинности $T(P_2) = \{(5, 3), (8, 3), (8, 5)\}$.

Как мы знаем, любое непустое множество содержит два подмножества: само себя и пустое. Это свойство автоматически выделяет из области определения два случая.

Тождественно-истинным называется предикат, истинный всюду на области определения: $T(P) = D(P)$. **Тождественно-ложным** называется предикат, множество истинности которого пусто: $T(P) = 0$.

Два предиката в одной и той же области определения **различны** в том и только в том случае, если их множества истинности не совпадают. Это определение совпадает с отрицанием обычного определения равенства функций.

Логические операции (связки) над предикатами

Связки, аналогичные связкам булевой алгебры и исчисления высказываний, соответствуют логическим операциям над предикатами. Операции над n-местными предикатами вводятся аналогично одноместным.

Пусть, например, $P(x, \ldots)$ и $Q(x, \ldots)$ — предикаты, которые определены на множестве D, причем $T(P)$ и $T(Q)$ — их множества истинности.

1. Отрицание

Отрицанием предиката $P(x,\ldots)$ называется предикат $\overline{P(x)}$, также определенный на множестве D и истинный при тех значениях переменной x, при которых $P(x, \ldots)$ ложен, т.е. $T(\bar{P}) = D \backslash T(P)$ (рис. 1.).

Например, предикат P(x): «x — простое число» определен на множестве $D = Z$ целых чисел, а его областью истинности являются только простые числа, т.е. числа, имеющие два делителя: x и 1.

Тогда предикат «x — составное (целое) число», также определенный на Z, будет отрицанием предиката P(x), т.е. $\overline{P(x)}$, а его областью истинности будет множество всех целых составных чисел (имеющих три и более делителей): $\mathrm{T}\left(\overline{P(x)}\right) = D \backslash \mathrm{T}\left(P(x)\right)$.

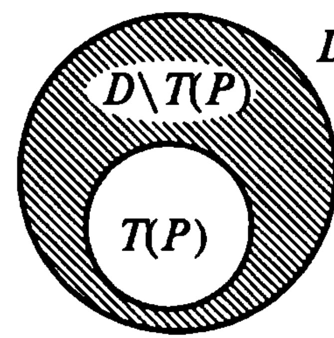


Рис. 1. Множество истинности предиката $\overline{P(x)}$

2. Конъюнкция предикатов

Конъюнкцией предикатов $P\ (x, \ldots)$ и $Q\ (x, \ldots)$ называется новый предикат $P(x) \wedge Q(x)$, определенный на множестве D и истинный при тех значениях переменной x, при которых истинны одновременно *оба* предиката $P(x, \ldots)$ и $Q(x, \ldots)$, поэтому $T(P \wedge Q) = T(P) \cap T(Q)$ (рис. 2).

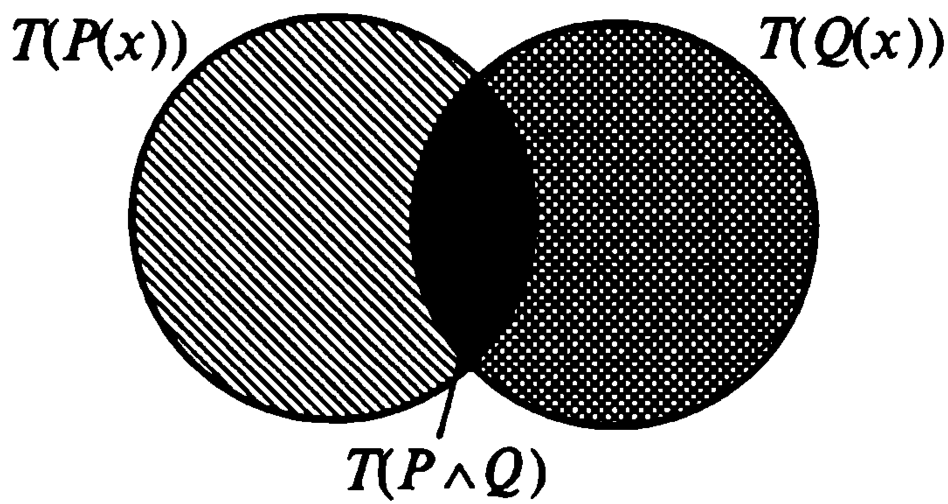


Рис. 2. Множество истинности конъюнкции предикатов

Примеры.

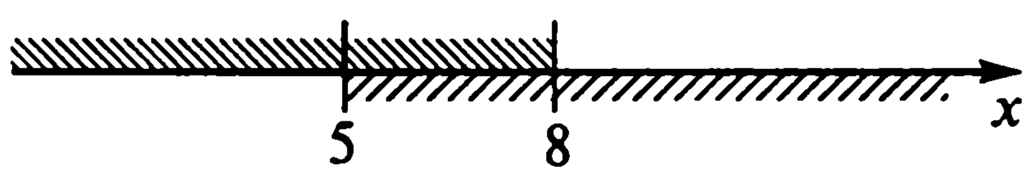
1. Для предикатов $P(x)$: «x — четное число» и $Q(x)$: «x кратно 7» конъюнкцией $P(x) \land Q(x)$ служит предикат «x — четное ***и*** кратное 7 число» или «x — число, кратное 14».

Примеры.

2. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x \leq 16, \\ 3x > 15 \end{cases}$ означает: решить первое неравенство, т.е. определить $T(P_1)$, решить второе неравенство – определить $T(P_2)$:

$$\begin{cases} 2x \leq 16, \\ 3x > 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 8, \\ x > 5. \end{cases}$$

Определить, при каких x верны **и** первое, **и** второе неравенства. В данном случае система $\begin{cases} x \leq 8, \\ x > 5 \end{cases}$ означает конъюнкцию высказываний $(x \leq 8) \wedge (x > 5) \Leftrightarrow 5 < x \leq 8$, а ответ является пересечением $T(P_1)$ и $T(P_2)$, т. е. интервал



3. Дизъюнкция предикатов

Дизъюнкцией предикатов $P\ (x, \ldots)$ и $Q\ (x, \ldots)$ называется новый предикат $P(x) \vee Q(x)$, определенный на множестве D и истинный при тех значениях переменной x, при которых истинен хотя бы один из предикатов $P(x, \ldots)$ **или** $Q(x, \ldots)$, поэтому $T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q)$ (рис. 3).

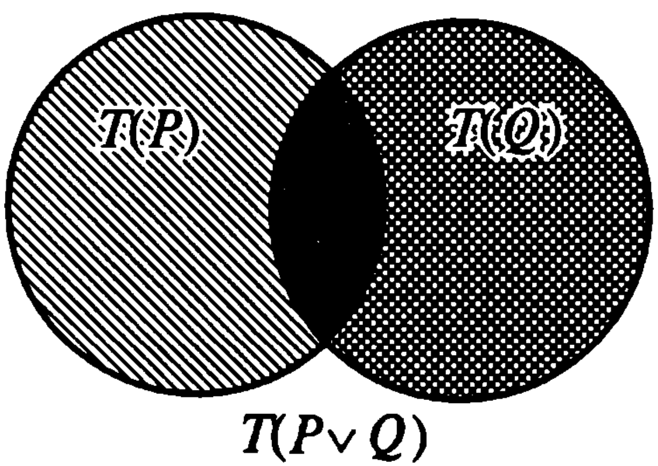


Рис. 2. Множество истинности дизъюнкции предикатов

Примеры.

1. Для предикатов $P(x)$: «x – число, кратное 3» и $Q(x)$: «x – число, оканчивающееся на 3», определенных на множестве N, дизъюнкцией $P(x) \vee Q(x)$ служит предикат «x – число ***или*** кратное 3, ***или*** оканчивающееся на цифру 3».
2. При решении уравнений (неравенств), левая часть которых есть произведение нескольких множителей, а правая — нуль, они разбиваются на совокупность уравнений (неравенств).

Например, $x^2 - 8x - 20 = 0 \Leftrightarrow (x-10)(x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 10 = 0\ (P_1)$ или $x + 2 = 0\ (P_2)$.

Таким образом, нужно найти $T(P_1) = \{10\}$ и $T(P_2) = \{-2\}$ и их объединение: $T(P) = \{-2,\ 10\}$.

4. Импликация предикатов

Импликацией предиката *P (x, …) в Q (x, …)* называется предикат $P(x) \to Q(x)$, определенный на множестве D и ложный только при тех значениях переменной x, при которой предикат $P(x, \ldots)$ истинен, а предикат $Q(x, \ldots)$ ложен. В соответствии с формулой алгебры логики $a \to b = \bar{a} \vee b$ имеем:

$P \to Q = \bar{P} \vee Q$ и $T(P \to Q) = \big(D \backslash \mathrm{T}(P)\big) \cup T(Q)$ (рис. 4).

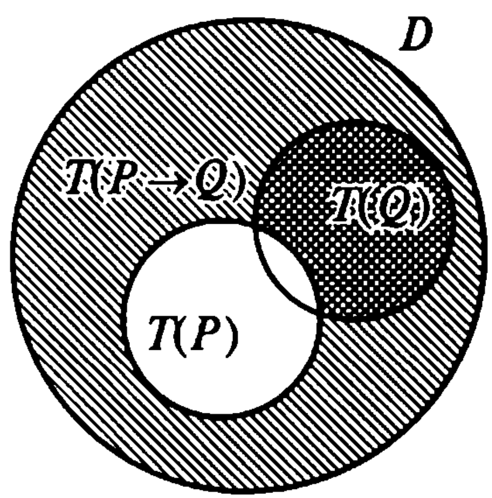


Рис. 4. Множество истинности импликации предикатов

Пример.

Импликацией предикатов $P(x)$: «x – нечетное число» и $Q(x)$: «x кратно 5», определенных на $N \cup \{0\}$, служит предикат $P(x) \to Q(x)$: «Если x – нечетное число, то x кратно 5». Здесь $T(P) = \{y | (y\, mod 2) = 1\} = \{1, 3, 5, \dots\}$;

$$T(Q) = \{y | (y\, mod 5) = 0\} = \{0, 5, 10, \dots\}.$$

Тогда $\mathrm{D} \backslash T(P) = \{y | (y\, mod 2) = 0\} = \{0, 2, 4, \dots\}$;

$$T(P \to Q) = \left(D \backslash \mathrm{T}(P)\right) \cup T(Q) =$$
$$= \{y | (y\, mod 2) = 0 \quad \text{или} \quad (y\, mod 5) = 0\} =$$
$$= \{0, 2, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Импликация верна, если число кратно двум или пяти.

5. Эквиваленция предикатов

Эквиваленцией предикатов $P\ (x,\ \ldots)$ **и** $Q\ (x,\ \ldots)$ называется предикат $P(x) \equiv Q(x)$, определенный на множестве D и истинный при тех значениях переменной x, при которых либо оба предиката истинны, либо оба предиката ложны. Поэтому

$$T(P \Leftrightarrow Q) = \big(T(P) \cap T(Q)\big) \cup \Big(\big(D \backslash \mathrm{T}(P)\big) \cap \big(D \backslash T(Q)\big)\Big).$$

В силу законов Де Моргана

$$\big(T(P) \cap T(Q)\big) \cup \Big(\big(D \backslash \mathrm{T}(P) \cup T(Q)\big)\Big) = D \backslash \mathrm{T}(P) \triangle T(Q).$$

Если $T(P) = T(Q)$, то $T(P \equiv Q) = D$.

Например, эквивалентны предикаты $P(x)$: «x – натуральное число, кратное 3» и $Q(x)$: «x – натуральное число, сумма цифр которого делится на 3».

6. Следование и эквиваленция

Высказывательная форма Q_2 **следует** из высказывательной формы Q_1, если импликация $Q_1 \to Q_2$ обращается в истинное высказывание при любых наборах значений переменных, входящих в нее. Для операции логического следования принято обозначение $Q_1 \Rightarrow Q_2$.

Пусть даны предикаты $Q_1(x_1,\ x_2, \dots, x_n)$ и $Q_2(x_1,$

Пусть даны два предиката, определенные на одном множестве. Высказывательные формы Q_1 и Q_2 назовем равносильными, если при любом наборе значений переменных, входящих в них, высказывательные формы принимают одинаковые значения истинности: $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$. Очевидно, что если $Q_1 \Rightarrow Q_2$, а $Q_2 \Rightarrow Q_1$, то $Q_1 \Leftrightarrow Q_2$. Тогда $T(Q_1) = T(Q_2)$, т.е. множества истинности равносильных предикатов также совпадают. Например, пусть высказывательные формы заданы на множестве действительных чисел R.

$$\frac{x^2-5x+6}{x-2}=0$$ и $x^2-5x+6=0$ не являются равносильными.

$$\frac{3x+8}{x^2+1}=0$$ и $3x+8=0$ являются равносильными.

$\ln(x-1)+\ln(x+1)=2$ и $\ln(x^2-1)=2$ не являются равносильными.

$\sqrt{x+3}=x-1$ и $x+3=(x-1)^2$ не являются равносильными.

$$\frac{4-8x}{2+x}\ge 0$$ и $(4-8x)(2+x)\ge 0$ не являются равносильными.

$$\frac{4-8x}{2+x}>0$$ и $(4-8x)(2+x)>0$ являются равносильными.

$x^2-x^4\ge 0$ и $1-x^2\ge 0$ не являются равносильными.

В математике нарушение цепочки тождественных преобразований при решении уравнений или неравенств влечет за собой потерю имеющихся или приобретение посторонних корней, т.е. изменение множества истинности исследуемого предиката.

Можно доказать, что *отношение равносильности* высказывательных форм обладает известными свойствами, а именно, оно *рефлективно и симметрично*. В том случае, когда одинаковые переменные в каждой из исследуемых форм принимают значения из одного множества, отношение равносильности будет обладать также и свойством транзитивности.

Тогда назовем *равносильным преобразованием* высказывательной формы Q_1 ее замену на равносильную форму Q_2. Две равносильные высказывательные формы с одинаковым набором переменных, для которых установлен одинаковый порядок, определяют один и тот же *предикат*.

Эти свойства предиката используются при решении уравнений и неравенств, которые тоже являются некоторыми высказывательными формами. Так, решение любого уравнения или неравенства предусматривает установление множества его истинности, т.е. множества истинности соответствующего ему предиката. В процессе поиска множества истинности производят замену одного предиката другим, равносильным данному, с целью упрощения имеющихся высказывательных форм.

Например,

$$2x - 13 + x^2 - (6x^2 - 4x + 5 - 5x^2) = 0 \Leftrightarrow 6x = 18 \Leftrightarrow x = 3,$$

т. е. множество истинности каждого из этих уравнений состоит из одного числа 3.

Упражнения

9.1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) «x делится на 5» ($x \in N$);

б) «Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек);

в) «$x^2 + 2x + 4$» ($x \in R$);

г) «$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» ($x, y \in R$);

д) «x есть брат y» (x, y пробегают множество всех людей);

е) «x и y лежат по разные стороны от z» (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости);

ж) «$\text{ctg}\ 45° = 1$»;

з) «x перпендикулярна y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости);

и) «$x^2 + x - 6 = 0$» ($x \in R$);

к) «Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$».

Упражнения

9.2. Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:

а) «$3 + 4 = 7$»;
б) «Вера и Надежда — сестры»;
в) «Сегодня — вторник»;
г) «Город Саратов находится на берегу реки Волги»;
д) «$\sin 30° = 0,5$»;
е) «А. С. Пушкин — великий русский поэт»;
ж) «$3^2 + 4^2 = 5^2$»;
з) «Река Индигирка впадает в озеро Байкал»;

Упражнения

9.4. Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$):

а) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$;

б) $(x - 3)(x + 3) < x^2$;

в) $e^{|x|} < \ln|x|$ $(x \neq 0)$;

г) $(x^2 + 1 = 0) \to ((x = 1) \vee (x = 2))$;

д) $(x < 0) \vee (x = 0) \vee (x > 0)$;

е) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$;

ж) $\sin x = \sin y$;

з) $x^2 = y^2 \to x = y$;

и) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;

к) $|x - y| \leqslant 3$;

л) $x^2 = 25$;

м) $x^2 + y^2 = 16$.

Домашнее задание

№ 1. Какие из следующих выражений являются предикатами? «x делится на 5» ($x \in N$); « $x^2 + 2x + 4$ » ($x \in R$); «x есть брат y» (x, y пробегают множество всех людей).	
№ 2. Из следующих предикатов с помощью кванторов постройте всевозможные высказывания и определите, какие из них истинны, а какие ложны ($x \in R$): 1) « $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ » 2) « $x^2 + y^2 = 16$ »	
№ 3. Найдите множества истинности следующих предикатов, заданных множествами: 1) «x кратно 3», $M=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 2) «$\sin x > 1$», $M = R$;	
№ 4. Изобразите на координатной прямой или на координатной плоскости множества истинности следующих предикатов:	
$y = x;$	$(x > 2) \leftrightarrow (x < 2);$
$(x > 2) \wedge (x < 2);$	$(x > 2) \vee (x < 2).$